MA2 – „písemná" přednáška „za" 23.3.2020

I. Konvergence v R^n, a k tomu „užitečné" množiny v R^n:

V R^n už máme (minulá přednáška) vzdálenost, tak již můžeme definovat limitu posloupnosti bodů v R^n, a také limitu, resp. spojitost funkce n proměnných – ale nejdříve si připomeneme ještě pomocné nástroje k vyjádření toho, co znamená limita v R^n – podobně jako v R^1, okolí bodu, a popíšeme, k „jakým bodům" se můžeme při studování limity funkce n-proměnných „přiblížit"; (tj. počítat limitu můžeme v „jakých" bodech?)

Definice 1.

Okolí bodu $a \in R^n$:

nechť $a \in R^n$, $\delta > 0$; pak

obyčejné okolí bodu a (o poloměru $\delta > 0$) je $U(a,\delta) = \{x \in R^n;\ d_n(a,x) < \delta\}$

prstencové okolí bodu a je $P(a,\delta) = \{x \in R^n;\ 0 < d_n(a,x) < \delta\}$

$$(= U(a,\delta) \setminus \{a\})$$

Ú okolí v R^2, R^3 (pro představu)

$U(a,\delta)$ je v R^2 kruh (bez hranice) o středu v bodě $\underline{a}$ a poloměru δ,
v R^3 „kulička" o středu v bodě $\underline{a}$ a poloměru δ

$P(a,\delta)$ je v R^2 kruh o poloměru $\delta > 0$ a středu $\underline{a}$, ale „bez $\underline{a}$"
analog. v R^3 „kulička" o středu $\underline{a}$ a poloměru $\delta > 0$, „bez $\underline{a}$"

<u>Definice 2</u> – <u>limita posloupnosti bodů</u> $x^{(k)} \in R^n$, $k=1,2,\dots,n,\dots$

$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x \in R^n$, když platí:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists k_0\in N\ \forall k>k_0 :\ d_n(x^{(k)},x) < \varepsilon$$

(„lidově": když $k\to\infty$, $x^{(k)}$ se přibližují k x – vzdálenost „nulové")

<u>Ekvivalentně</u> (problémek – analogické limitě vektorové funkce jedné proměnné – zkuste promyslet)

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x \iff \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i \quad \text{pro } \forall i=1,2,\dots,n$$

(zde $x^{(k)}=(x_1^{(k)}, x_2^{(k)},\dots, x_n^{(k)})\in R^n$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$)

(toto je vlastně i návod k výpočtu limity posloupnosti)

<u>Příklad</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}, \frac{1-n^2}{1+n^2}\right) = (0,1,-1)$$

(neboť $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{1+n^2}=-1$)

II. <u>Limita funkce $f: M\subset R^n \to R$</u>

Abychom mohli uvažovat $\lim_{x\to a} f(x)$ pro funkci jedné proměnné, $f(x)$ byla definovaná v $P(a,\delta)$, případně, pokud f byla definovaná jen v $P^+(a,\delta)$ (nebo $P^-(a,\delta)$), mohli jsme zkoumat t.zv. jednostranné limity $\lim_{x\to a+} f(x)$ ($\lim_{x\to a-} f(x)$).

V „jakých" bodech budeme moci zkoumat limitu funkce f n-proměnných? Je třeba „charakterizovat" možnost k „limitnímu" bodu se „přiblížit":

Definice : nechť je $M \subset R^n$; $M \neq \emptyset$; pak

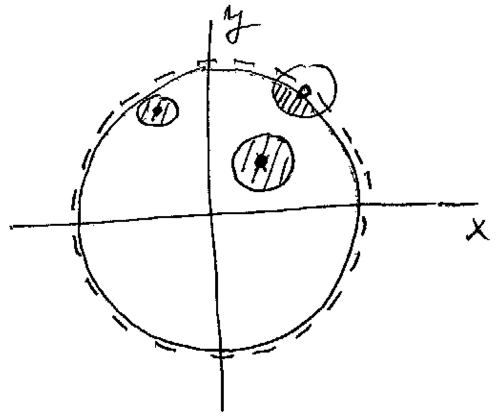
1) $a \in M$ se nazývá vnitřní bod množiny M, ex.-li okolí $U(a,\delta) \subset M$;

2) a je hromadný bod množiny M (někdy se také nazývá limitní bod M), když platí:
$\forall P(a,\delta)$ je $P(a,\delta) \cap M \neq \emptyset$
(tj. v libovolném okolí bodu a je „nějaký" bod z M)

a pak ekvivalentně (promyslete – problémek!):
a je hromadný bod množiny M, když existuje posloupnost $\{x^{(k)}\}$, $x^{(k)} \in M$, $k=1,2..$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a$ (proto název „limitní" bod M)

Příklady:

1. Je dána funkce $f(x,y) = \ln(1-(x^2+y^2))$, pak
$Df = \{[x,y] \in R^2;\ x^2+y^2 < 1\}$
(tj. kruh o poloměru $r=1$ a středu v $[0,0]$ bez kružnice $x^2+y^2=1$)

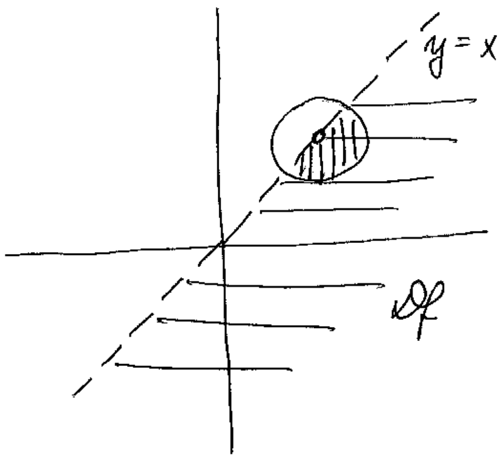


Libovolný bod z Df je vnitřním bodem Df;
a dále, body kružnice o rovnici $x^2+y^2=1$ jsou hromadné body Df

2. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, $\mathcal{D}f = \{[x,y] \in R^2;\ [x,y] \neq [0,0]\}$;

počátek $O=[0,0]$ je ale hromadný bod $\mathcal{D}f$ – neboť pro libovolné okolí $P(O,\delta)$ platí: $P(O,\delta) \cap \mathcal{D}f = P(O,\delta) \neq \emptyset$ (neboť $P(O,\delta) \subset \mathcal{D}f$)

3. $f(x,y) = \ln(x-y)$, $\mathcal{D}f = \{[x,y];\ x-y>0\}$ (tedy, pro body $[x,y] \in \mathcal{D}f$ platí: $x>y$):



všechny body z $\mathcal{D}f$ jsou body vnitřní, body přímky $y=x$, tj. body $[x,x]$, $x \in R$, jsou hromadné body $\mathcal{D}f$ (viz obrázek)

A snad z uvedených příkladů je „vidět", že limita funkce f bude „mít smysl" buď ve vnitřních bodech $\mathcal{D}f$ (ty jsou též body hromadné), nebo i v hromadných bodech $\mathcal{D}f$, které nejsou vnitřními body, ale lze se k nim „přiblížit".

A je užitečné označení:

Množinu všech hromadných bodů množiny $M \subset R^n$, $M \neq \emptyset$, budeme označovat M'.

A nyní už můžeme definovat limitu funkce n-proměnných (a pomocí limity určíme i spojitost takové funkce – jako „dříve" u funkcí jedné proměnné)

Definice limity funkce více proměnných:

Mějme funkci $f: M \subset R^n \to R$, $M \neq \emptyset$, $a \in M'$

Definice 1 (vlastní limita f v bodě a vzhledem k množině M)

Fce f má v bodě $a \in M'$ vlastní limitu $L \in R$ vzhledem k M – píšeme $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = L$, když platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in M: \ 0 < \rho_n(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

nebo pomocí okolí:

$$\forall \mathcal{U}(L,\varepsilon)(\subset R) \ \exists \mathcal{P}(a,\delta)(\subset R^n) \ \forall x \in \mathcal{P}(a) \cap M: \ f(x) \in \mathcal{U}(L,\varepsilon)$$

Definice 2 (nevlastní limita f v bodě a vzhledem k M)

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = \underset{(-)}{+}\infty$, když platí:

$$\forall K \ (>0)(<0) \ \exists \mathcal{P}(a,\delta) \ \forall x \in \mathcal{P}(a,\delta) \cap M: \ f(x) > K \ (f(x) < K)$$

nebo:

$$\forall K \ (>0; <0) \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in M: 0 < \rho_n(x,a) < \delta \Rightarrow f(x) > K \ (<K)$$

Poznámka 1. limita f v nevlastním "bodě" zde v R^n, $n > 1$ "nemá smysl" – nedefinuje se!

Poznámka 2. a) Vzhledem k tomu, že metrika (vzdálenost) v R^n má stejné vlastnosti jako vzdálenost v R, tak platí věty o limitě součtu, součinu, podílu funkcí více proměnných – tj. platí (stejně jako v R) – aritmetika limit v R^* (R a $\pm\infty$ limity)

b) <u>Věta o limitě složené funkce</u> (tolik důležitá pro výpočet limit zatím dokážeme formulovat (analogie k větě o limitě složené fce jedné proměnné) pro složenou fci, kde vnitřní může být funkce více proměnných, ale vnější (zatím) funkce jedné proměnné, tj.:

<u>Věta</u>: (o limitě složené funkce):

nechť $g : M \subset R^n \to R$, $a \in M'$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} g(x) = b$, $g(x) \neq b$ v $P(a)$

a $\lim\limits_{y \to b} f(y) = L \ (\pm\infty)$; potom existuje

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(g(x)) = L .$$

c) dále je opět užitečná <u>věta o limitě sevřené funkce</u>

<u>Věta</u>: nechť (i) $g(x) \le f(x) \le h(x)$ v $P(a) \cap M$, $a \in M'$;

(ii) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} h(x) = L \in R$;

Potom existuje i $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = L$.

(analogicky lze formulovat větu i pro nevlastní limitu (zde stačí „jeden" ohraničit"))

A pro důkaz neexistence limity funkce důležitá

<u>Věta:</u> Nechť $f: M\subset R^n \to R$, $M_1\subset M$, $a\in M_1'\cap M'$;

pak platí: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x)=L \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in M_1}} f(x)=L$. $(L\in R, \pm\infty)$

Tedy – „lidově" – pokud existuje limita vzhledem k „větší" množině, pak funkce má tutéž limitu i vzhledem k množině „menší", tj. která je částí té množiny první)

<u>A užití této věty:</u>

Najdeme-li množiny $M_1\neq M_2$, $M_1\subset M$, $M_2\subset M$, $a\in M_1'\cap M_2'\cap M$ takové, že $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in M_1}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in M_2}} f(x)$, pak funkce f nemá

limitu v bodě $\underline{a}$ vzhledem k M!

(Vidíte, doufám, analogii se situací, kdy se u funkce jedné proměnné lišily jednostranné limity v bodě $a\in R$, nebo, když jsme našli posloupnosti $x_n\to a$, $\tilde{x}_n\to a$ takové, že $x_n\neq a$, $\tilde{x}_n\neq a$ a $\lim f(x_n)\neq \lim f(\tilde{x}_n)$ (Heineho věta), fce f pak neměla limitu v bodě $\underline{a}$.)

<u>Poznámka ke značení limity f v bodě $a\in M'$, $f: M\subset R^n\to R$:</u>

Je-li $\underline{a}$ vnitřní bod množiny M, tj. existuje $P(a,\delta)\subset M$, pak nebudeme říkat „limita vzhledem k M" – jen limita v bodě $\underline{a}$ (jako dříve) a psát

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \ (\in R, \pm\infty)$$

<u>Příklady výpočtu limit</u> – po definici spojitosti fce v bodě.

Spojitost funkce v bodě $a \in M$ (vzhledem k množině)

Definice: Mějme funkci $f: M \subset R^n \to R$, $a \in M \cap M'$;
říkáme, že funkce f je spojitá v bodě a vzhledem k M,
když $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = f(a)$.

Je-li a vnitřní bod M, pak říkáme, že f je spojitá v bodě a.

A vzhledem ke „stejné" definici jako u funkcí jedné proměnné, platí opět „aritmetika" spojitosti a spojitost složené funkce, je-li (zatím) vnější funkce funkcí jen jedné proměnné. „Obecný případ", kdy bude vnější funkce funkcí více proměnných, „také" probereme (později – vnitřní funkce pak je vektorová funkce více proměnných, a asi už je zřejmé, že limity i spojitost „vektoru" bude ekvivalentní s limitou a spojitostí jednotlivých „složek" vektoru – už jsme viděli u vektorových funkcí jedné proměnné – asi je už jasné, že i zde to bude tak „fungovat")

A nyní několik příkladů:

A ještě nejprve užitečné připomenutí: z definice $d_n(x, y)$ v R^n plyne: $d_n(x,a) < \delta \Rightarrow |x_i - a_i| < \delta \quad \forall i$, a obráceně,
$|x_i - a_i| < \frac{\delta}{n} \ \forall i \Rightarrow d_n(x,a) < \delta$,

tedy (pro „pocity"): $x \to a$ lze „chápat" $x_i \to a_i$, $i = 1, 2, .. n$.

1. $f_1(x,y) = 4-(x^2+y^2)$:

$Df_1 = R^2$, f je spojitá v R^2, limitu lze počítat dosazením

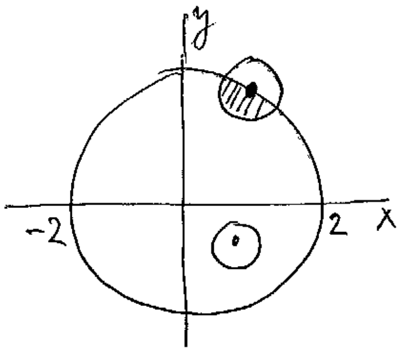
$$\left(\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(4-(x^2+y^2)\right) = 4-(a^2+b^2) \right)$$

$\iff x\to a,\ y\to b$

2. $f_2(x,y) = \sqrt{4-(x^2+y^2)}$

$M = Df = \{ [x,y];\ 4-(x^2+y^2) \geqq 0 \} = \{ [x,y];\ x^2+y^2 \leqq 4 \}$

množina vnitřních bodů Df : $\{ [x,y];\ x^2+y^2 < 4 \}$



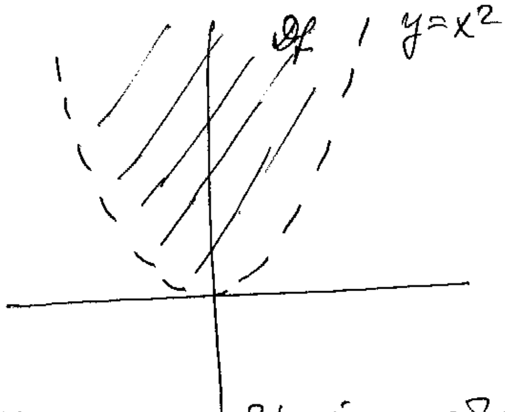
(kruh bez „kružnice" o poloměru $2=r$)

kružnice $\{ [x,y];\ x^2+y^2=4 \}$ je také množina hromadných bodů (ale ne vnitřních), takže zde

$M = M'$

f je spojitá v každém bodě z Df vzhledem k Df

3. $f_3(x,y) = \ln(y-x^2)$



$Df = \{ [x,y]\in R^2;\ y-x^2>0 \}$

$(y>x^2)$

f je spojitá v Df (lib. bod z Df je vnitřním bodem Df;

body paraboly $y=x^2$, tj. $\{ [x,y];\ x\in R,\ y=x^2 \}$ je množina hromadných bodů Df, i když tyto body nejsou body Df.

a např. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ y>x^2}} \ln(y-x^2) \underset{\text{VLSF}}{=} \lim\limits_{t\to 0+} \ln t = -\infty$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} (y-x^2) = 1-1 = 0$$

4) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

$D_f = R^2 \setminus \{[0,0]\}$; $O = [0,0]$ je hromadný bod D_f, a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$x^2+y^2 = t$ a $(x,y)\to(0,0) \Rightarrow t\to 0$

f je spojitá v D_f (limita „dosazením")

5) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

$D_f = R^2 \setminus \{[0,0]\}$, f je spojitá v D_f, $[0,0]$ je hromadný bod,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t} = +\infty$$

($x^2+y^2 = t \to 0$ pro $(x,y)\to(0,0)$)

6) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

$D_f = R^2 \setminus \{[0,0]\}$, f je (opět) spojitá v D_f, $[0,0]$ je hromadný bod D_f, tedy lze

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = „\frac{0}{0}"$$

– a co teď? nemáme (a nebudeme mít) „l'Hospitala"

– takové limity jsou u funkcí více proměnných obtížné – buď lze odhadovat (VOS), nebo se často ukáže, že limita neexistuje

„Obtížné" limity nebudeme počítat, jen jich" několik ukážu,
„aby bylo vidět, v čem spočívají ty „naše" obtíže s limitami
a třeba nám to pomůže i trochu více „vidět" vlastnosti
funkcí více proměnných, v čem mohou být „jiné" než
funkce jedné proměnné, a na co je třeba dávat pozor!

A „náš" příklad: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = ?$

odhad: (tj. strážníci) – důležitá a užitečná nerovnost je

(*) $\quad |xy| \leq x^2+y^2 \quad$ (dokonce $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$)

a tedy můžeme najít „strážníky":

$$\left.0 \leq \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} = |y| \right\} \Longrightarrow \text{VOS}$$

a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0 .$$

7. A co kdyby „jen" $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \overset{\text{opět}}{=} „\dfrac{0}{0}"$ – ale „vidíme" z (*),

že asi $x.y$ bude „řádově" stejná „0" jako x^2+y^2!

A pak často limita nemusí existovat!

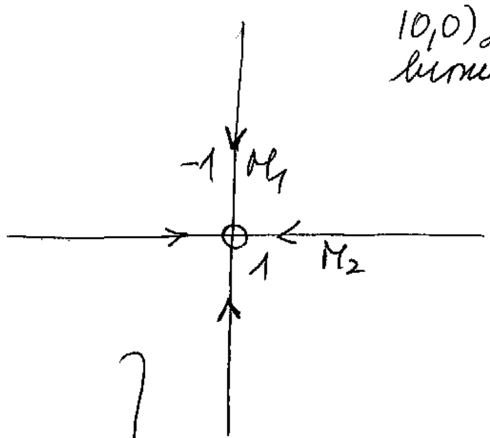
Zde vezměme $M_k = \{[x,y];\ y = kx,\ x \neq 0\}$; pak

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in M_k}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k.x^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2} \rightarrow \text{tj. různé limity pro „různá" } k!$$

Tedy, funkce $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ nemá v bodě $[0,0]$

limitu (dle věty o limitě funkce vzhledem k podmnožinám)

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = „\dfrac{0}{0}“$ – opět tato limita neexistuje, $(0,0)$ je hromadný bod D_f



neboť; totiž

$M_1=\{[x,y];\ x=0\}$ (osa y)

pak $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y^2}{y^2}=-1$

a pro $M_2=\{[x,y];\ y=0\}$ (osa x) $\Big\}\ \neq$!

je $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

Teď bychom měli shrnout vlastnosti spojitých funkcí (totiž jak to máme definováno) na zadaných množinách v R^n (jako v MA 1), ale nechme si toto na pozdější „praxi" přednášek, a jistě se teď podíváme na to, jak se dá pokračovat (nebo spíše nedá) se zobecněním základních pojmů z diferenciálního počtu fcí jedné proměnné – chybí derivace funkce více proměnných – tj. lze takto definovat $(x\in U(a)\subset R^n)$

$$(*)\quad f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ ??\quad (U(a)\subset D_f)$$

Nepůjde toto „udělat" – neboť neumíme „dělit" vektorem $(x-a)$!

Co tedy lze udělat pro „rozšíření důležitého pojmu „derivace" i na funkce více proměnných?

Aby ve jmenovateli výrazu pro „derivování" bylo jen „reálné číslo" a ne vektor, jako v (*) – můžeme se „zbavit" při limitě v (*) jen jednou proměnnou, takže vlastně definovat limitu v (*) je vzhledem k podmnožině D_f, kde se mění jen jedna proměnná (asi nejjednodušší případ) a bod $\underline{a}$ je též přitom i hromadný bod těchto množin.

Tedy přesněji: (vezměme i-pevné, a jen x_i bude proměnné)

Definice: Nechť $\underline{a}$ je vnitřní bod M; $f: M \subset R^n \longrightarrow R$. Pak limitu (existuje-li)

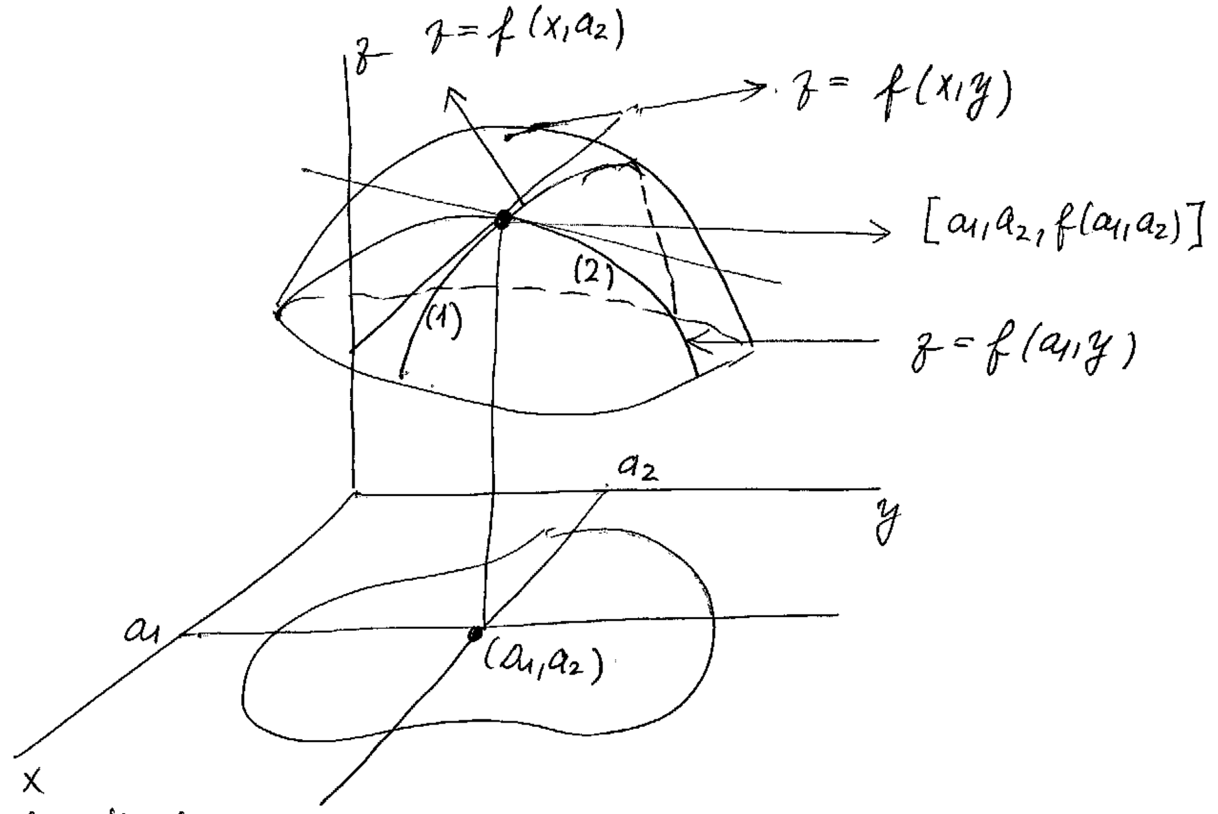
$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \dots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots a_n) - f(a_1, \dots a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots a_n)}{x_i - a_i}$$

nazýváme parciální derivací funkce f v bodě a podle x_i a značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) \left(= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ krátce}\right)$

(také modernější někdy $f_{x_i}(a)$).

Ukažme si, co „parciální" derivace funkce „znamenají", co „popisují" na funkci dvou proměnných.

Uvažujme funkci $z = f(x,y)$, $(x,y) \in U(a_1,a_2)$



Pak vlastně je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) = \frac{d}{dx} f(x,a_2)\Big|_{x=a_1}$$

(graf (1))

– tj. geometricky "derivace funkce „proměnné x", jejíž graf je řez grafu funkce f rovinou $y = a_2$

(tj. směrnice tečny k tomuto řezu, a tedy i k „ploše", která je grafem fce $f(x,y)$), v bodě $[a_1,a_2,f(a_1,a_2)] = A$

a totéž lze si představit i o $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) = \frac{d}{dy} f(a_1,y)\Big|_{y=a_2}$

a tedy geometricky – dostaneme směrnici tečny ke grafu v bodě A řezu grafu fce f rovinou $x = a_1$. (graf (2)) (viz obr.)

V definici $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2 .., a_n)$ parciální derivace fce f v bodě $a = (a_1, a_2 .., a_n)$ se často užívá i zápis s „h", tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, .., a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, .. a_n) - f(a_1, .. a_{i-1}, a_i, .. a_n)}{h},$$

nebo „jednodušší" zápis: $\vec{h}_i = (0, .., 0, \overset{i}{h}, 0 ... 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + \vec{h}_i) - f(a)}{h}$$

Parciální derivace jsou vlastně derivace funkce jedné proměnné, tedy je „umíme" počítat – jen se při výpočtu ze začátku „plete" ostatní proměnné – – je třeba natrénovat to, že vidíte jen jednu proměnnou, a to tu, dle které se má derivovat, a ostatní proměnné je třeba naučit se vnímat jako konstanty. Chce to trochu „trénovat"!

Příklady výpočtu parciálních derivací funkce.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$

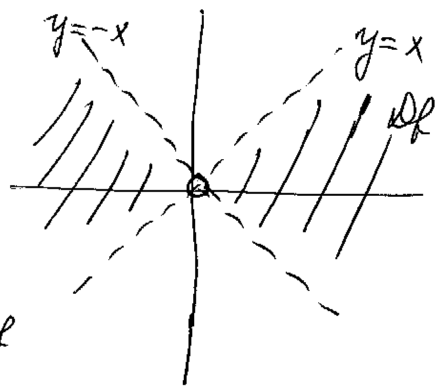
Poznámka: Opět, jako u funkcí jedné proměnné, parciální derivace můžeme počítat v bodech (x,y), kde existují, a považovat $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ za funkce proměnných (x,y)

2. $f(x,y) = \ln(y-x^2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y-x^2}(-2x) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y-x^2}\cdot 1$$

$$(x,y) \in \mathcal{D}f = \{[x,y] ;\ y-x^2>0\}$$

3. $f(x,y) = 2x^2y + \frac{x}{y} + \ln(x^2-y^2)$



$$\mathcal{D}f = \{[x,y] ;\ y \neq 0 \ \text{ a } \ x^2>y^2\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x \qquad \text{v } \mathcal{D}f$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 - \frac{x}{y^2} + \frac{1}{x^2-y^2}(-2y) \quad \text{v } \mathcal{D}f$$

a derivace v bodě $(2,1) \in \mathcal{D}f$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 8+1+\frac{1}{4-1}\cdot 4 \quad (\text{atd})$$

Chápeme-li $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ jako funkce, definované tam, kde f má příslušné parciální derivace, pak, pokud existují parciální derivace těchto „prvních" parciálních derivací, můžeme „dále" derivovat a dostáváme parciální derivace vyšších řádů: derivace druhého řádu fce $f(x,y)$ jsou:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Derivace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ – <u>nesmíšené derivace</u>, druhého řádu

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ – <u>smíšené derivace</u>

<u>Příklad</u>: $f(x,y) = \ln(y - x^2)$ v D_f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y-x^2}\cdot(-2x), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y-x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2x}{y-x^2}\right) = \frac{-2(x^2+y)}{(y-x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-1}{(y-x^2)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2x}{y-x^2}\right) = \frac{2x}{(y-x^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y-x^2}\right) = \frac{2x}{(y-x^2)^2} \end{aligned}\right\} \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)}$$

Rovnost druhých smíšených derivací není náhoda – platí, že pokud derivace smíšená druhého řádu je spojitá, pak nezáleží na pořadí derivování (viz věta)

Dále, pokud považujeme derivace druhého řádu za funkce, můžeme dále derivovat ", pokud dané derivace existují" – dostaneme parciální derivace třetího řádu, analogicky definujeme parciální derivace vyšších řádů i u funkcí n-proměnných: $f(x_1, x_2, .., x_n)$; pak lze

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, .., x_n)$ – derivace 1. řádu, $i = 1, 2, .., n$, $X = (x_1, .. x_n)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(X)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}(X)$

Platí:

Věta (o záměnnosti parciálních derivací)

Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ spojitá v bodě a, pak existuje i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ $\quad (i,j = 1,\dots,n)$, $f: M \subset R^n \to R$)

Analogicky toto lze říci i pro derivace řádu vyšších – je-li p-tá smíšená derivace funkce spojitá v bodě $\underline{a}$, pak nezáleží na pořadí derivování.

Poslední poznámka

Když $f: M \subset R \to R$ měla v bodě $\underline{a}$ vlastní derivaci $f'(a) \in R$, pak f byla spojitá v bodě a, a platilo, že

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \omega(x-a), \text{ kde } \lim_{x\to a} \frac{\omega(x-a)}{x-a} = 0,$$

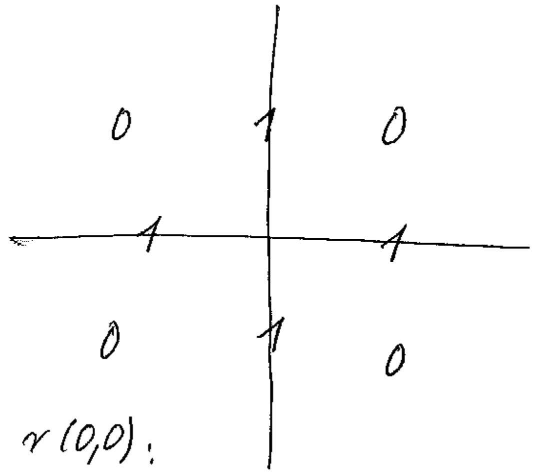
tedy $f(x)$ bylo možno v okolí bodu a lineárně aproximovat (s malou chybou), graficky – ke grafu existovala tečna v bodě $[a, f(a)]$.

U funkce více proměnných ale bohužel parciální derivace nezaručují ani spojitost; existence (jen) parciálních derivací je „slabší" vlastnost než existence $f'(a)$ u funkcí jedné proměnné. Ukážeme si příklad.

- Příští přednášku ukážeme, jak toto „vyřešit" –
- zavede se pojem „funkce diferencovatelná v bodě" a totální diferenciál.

<u>Příklad</u> funkce, u které existence parciálních derivací „nezaručí" spojitost :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \ , & x \cdot y \neq 0 \\ 1 \ , & x \cdot y = 0 \end{cases}$$



f není spojitá v bodě (0,0), protože ani neexistuje limita v (0,0).

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 1 = 1 \ , \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=y}} f(x,y) = \lim 0 = 0 \quad !$$

neexistuje-li $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, pak f nemůže být spojitá v (0,0).

Ale přitom f má parciální derivace v bodě (0,0) – obě!

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-1}{x} = 0$$

$$\text{a i } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1-1}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \quad !$$